6.3 Príklady zložitejších funkcionálov

V predošlom článku sme sa zaoberali funkcionálom

$$v[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), x'(t)]dt$$

pri daných okrajových podmienkach $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$. V tejto časti sa budeme zaoberať zložitejšími funkcionálmi, pričom uvedieme iba základné výsledky.

6.3.1. Viac premenných

Predošlé výsledky zovšeobecníme na funkcionál v, ktorý bude závislý na viacerých funkciách $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Uvažujme funkcionál

$$v[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)]dt,$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in C^2\langle t_0, t_1\rangle$, pri zadaných okrajových podmienkach

$$x_1(t_0) = x_{10}, \ldots, x_n(t_0) = x_{n0},$$
$$x_1(t_1) = x_{11}, \ldots, x_n(t_1) = x_{n1},$$

Nech sa mení iba jedna z premenných, napríklad x_j, $j = 1,2,\ldots,n$. Potom funkcionál

$$\bar{v}[x_j(t)] = v[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_j(t), \ldots, x_n(t)].$$

závisí iba na jednej funkcii x_j a preto môžeme použiť, pre určenie nutnej podmienky, výsledky z predošlého článku, na funkcionál $\bar{v}[x_j(t)]$. Funkcia na ktorej daný funkcionál nadobúda extrém je riešením Eulerovej rovnice

$$F_{x_j} - \frac{d}{dt}F_{x_j'} = 0.$$

Podobne dostaneme podmienky pre ostatné premenné, teda

$$F_{x_j} - \frac{d}{dt}F_{x_j'} = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

čo je systém diferenciálnych rovníc 2 - ho rádu.

Príklad 6.3.1 *Nájdime extremály funkcionálu*

$$v[x, y] = \int_0^1 [x'^2 + y'^2 + x'y']dt,$$

pri okrajových podmienkach $x(0)=-1, x(1)=1, y(0)=2, y(1)=-2$.

Riešenie: Odpovedajúci systém Eulerovych diferenciálnych rovníc je

$$0-\frac{d}{dt}(2x'+y')=0, \quad 0-\frac{d}{dt}(2y'+x')=0.$$

Všeobecné riešenie môžeme vyjadriť v tvare

$$x(t)=C_1+C_2t, \quad y(t)=C_3+C_4t \ ,$$

kde C_1, C_2, C_3, C_4 sú ľubovoľné konštanty. Vzhľadom na dané okrajové podmienky dostávame $C_1=-1, C_2=2, C_3=2, C_4=-4$. Extrém daného funkcionálu môže nastať len na krivke $x(t)=2t-1, \quad y(t)=-4t+2$.

Riešenie pomocou MATLABu:

```
>> syms t x y
>> [x,y] = dsolve('2*D2x+D2y=0, 2*D2y+D2x=0', 'x(0) = -1,x(1)=1,y(0)=2, y(1)=-2')
 x =
2*t-1
 y =
-4*t+2
```

Príklad 6.3.2 Nájdime extremály funkcionálu

$$v[x,y]=\int_0^{\pi/2}\left[x'^2+y'^2+2xy\right]dt,$$

pri okrajových podmienkach $x(0)=0, x(\pi/2)=1, y(0)=0, y(\pi/2)=-1$.

Riešenie: Odpovedajúci systém diferenciálnych rovníc je $x''-y=0, \quad y''-x=0$.

Elimináciou premennej y dostávame diferenciálnu rovnicu $x^{(4)}-x=0$. Jej všeobecné riešenie je

$$x(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t.$$

Potom

$$y(t)=x''=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t.$$

Vzhľadom na dané okrajové podmienky dostávame $C_1=C_2=C_3=0, C_4=1$.
Extrém daného funkcionálu môže nastať len na krivke $x(t)=\sin t, y(t)=-\sin t$.

Riešenie pomocou MATLABu:

```
>> syms t x y
>> [x,y] = dsolve('D2x-y=0, D2y-x=0', 'x(0) = 0,x(pi/2)=1,y(0)=0, y(pi/2)=-1')
 x =
sin(t)
y =
```

-sin(t)

6.3.2. Vyššie derivácie

Majme funkcionál

$$v[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F\left[t, x_1(t), x_1'(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right] dt., \; x \in A,$$

kde A je množina všetkých funkcií $C^{2n}\langle t_0, t_1 \rangle$, ktoré splňujú okrajové podmienky

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_0' \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)},$$
$$x(t_1) = x_1, x'(t_1) = x_1' \ldots, x^{(n-1)}(t_1) = x_1^{(n-1)}.$$

Nutnú podmienku pre existenciu lokálnych extrémov nájdeme podobne ako pre funkcionál (6.1). Budeme predpokladať, že funkcia F je $n+2$ - krát spojito diferencovateľná podľa všetkých argumentov. Pre prvú variáciu daného funkcionálu platí:

$$\delta v = \int_{t_0}^{t_1} \left\{F_x \delta x + F_{x'} \delta x' + \ldots + F_{x^{(n)}} \delta x^{(n)}\right\} dt.$$

Postupným integrovaním, jednotlivých členov, po častiach dostávame

$$\delta v = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} F_{x^{(n)}} \right\} \delta x dt.$$

Podobne ako pre funkcionál $v[x(t)]$, vzhľadom na spojitosť podintegrálnej funkcie a ľubovoľnom δx, dostávame

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} F_{x^{(n)}} \equiv 0.$$

To znamená, že funkcia $x = x(t)$ na ktorej daný funkcionál nadobúda extrém musí byť riešením rovnice

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} F_{x^{(n)}} = 0.$$

Túto diferenciálnu rovnicu $2n$ - tého rádu nazývame **Euler -Poissonovou rovnicou**.